

401 Midterm Solution

April 30, 2018

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported” license.



[1] Logic

(a) 다음 표현식의 truth table 을 작성하시오.

$$(p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)$$

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee \neg q)$	
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

(b) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 을 사용하여 $p \leftrightarrow q$ 의 truth table 을 작성하시오.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(c) 다음 명제의 진위를 판별하시오. true or false?
if $3+5 < 2$, then $1+3=4$ ($F \rightarrow T$): True

(d) 다음 명제 P, Q 가 논리적으로 동치인지 아닌지를 truth table 을 사용하여 보이시오.

$$P = p \wedge (\neg q \vee r)$$

$$Q = p \vee (q \vee \neg r) \quad \text{not equivalent}$$

p	q	r	$\neg q \vee r$	$q \vee \neg r$	P	Q
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	F	T

(e) 다음 두개의 가설이 true 일 때 결론을 쓰시오.
If $p \rightarrow q$, $\neg q$ then conclusion? $\neg p$

[2] Boolean Algebra

다음은 입력이 x, y, z 이고 출력이 F 인 시스템에 관한 문제이다.

k-map 이 다음과 같을 때 다음 질문에 답하시오.

	$yz=00$	$yz=01$	$yz=11$	$yz=10$
$x=0$	1	1	0	0
$x=1$	1	1	0	0

(a) 함수 F 를 minterm 들 m_i ($i=0,1,\dots,7$) 중 4 개를 사용하여 나타내시오.

$$F = m_0 + m_1 + m_4 + m_5$$

(b) 위의 minterm 들을 x, y, z 에 관한 식으로 바꾸시오. $F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$

(c) 함수 F 의 truth table 을 구하시오.

x	y	z	F
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

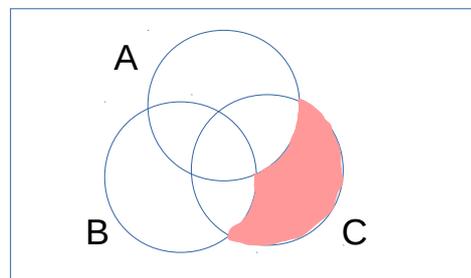
(d) k-map 을 사용하여 F 함수식을 간단히 하시오.
 $F = \bar{y}$

[3] Sets

(a) $A = \{a, b, c\}$ 의 모든 부분 집합을 쓰시오.

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}$$

(b) $A^c \cap B^c \cap C$ 의 Venn Diagram 을 그리시오.



[4] Functions

함수 f, g 는 모두 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 정의된다.

함수 f 는 $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$ 이고

함수 g 는 $\{(1,2), (2,2), (3,3), (4,3)\}$ 이다

(a) $f \circ g$ 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.
No compound function exists

(b) $g \circ f$ 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.
 $\{(1,2), (2,3), (3,3), (4,2)\}$

(c) $f \circ f \circ f$ 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.
 $\{(1,4), (2,1), (3,2), (4,3)\}$

(d) f 는 단사함수인가? **Yes**

(e) g 는 전사함수인가? **No**

[5] Matrix

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하시오. **17**

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하시오. **-48**

(c) 다음 연립방정식에 대하여 Cramer's 법칙을 사용하여 x 를 구하시오. **$x=148/21$**

$$\begin{aligned} 2x+6y+z &= 7 \\ x+2y+z &= 7 \\ 5x+7y-4z &= 9 \end{aligned}$$

분자 행렬식 **148**

7	6	1		
7	2	1		
9	7	-4		

분모 행렬식 **21**

2	6	1		
1	2	1		

5	7	-4		
---	---	----	--	--

[6] Relations

$\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 정의된 관계 R 은 다음과 같다
 $R = \{(1,4), (2,1), (3,2), (4,3)\}$

(a) R 은 대칭적인가? **No**

(b) R 은 반사적인가? **No**

(c) R 은 추이적인가? **No**

(d) R 은 반대칭적인가? **Yes**

(e) R 의 reflexive closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$\{(1,4), (2,1), (3,2), (4,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

(f) R 의 symmetric closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$\{(1,4), (2,1), (3,2), (4,3), (4,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$

(g) R 의 transitive closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

[7] Algorithms

(a) $f(n) = n^3 + (10n^{1/2})^3$ 을 Θ 식으로 나타내

```

procedure bubblesort(a(1), ..., a(n): real number with n >=2)
  for i := 1 to n-1
    for j := 1 to n-i
      if a(j) > a(j+1) then interchange a(j) and a(j+1)
  {a(1), ..., a(n) is in increasing order}
    
```

시요.

$$f(n) = \Theta(n^3)$$

(b) $f(n) = \Theta(n^2)$ 이면 $f(n) = O(n^3)$ 인가?

Yes

(c) 다음 알고리즘을 사용하여 {1, 8, 5, 2, 3, 7, 4, 6} 을 정렬하려고 한다.

$i=1$ 에서 $i=7$ 단계의 중간 결과를 쓰시오

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7
1	1	1	1	1	1	1
5	2	2	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3	3
3	5	4	4	4	4	4
7	4	5	5	5	5	5
4	6	6	6	6	6	6
6	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8

402 Midterm Solution

April 30, 2018

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported” license.



[1] Logic

(a) $\neg(p \wedge q) \vee (q \vee \neg r)$ 의 truth table 을 작성 하시오.

p	q	r	$\neg(p \wedge q)$	$(q \vee \neg r)$	
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

(b) $p \vee q \rightarrow \neg r$ 의 truth table 을 작성 하시오.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T

(c) 다음 명제의 진위를 판별 하시오. true or false?
if $3+2 < 12$, then $1+3 > 4$ ($T \rightarrow F$): **False**

다음은 주어진 두개의 가설이 true 일 때 결론을 찾는 문제이다.

- (d) if $\neg p \rightarrow q$, $\neg p$, then conclusion? **q**
- (e) if $\neg p \rightarrow q$, $\neg q$, then conclusion? **p**
- (f) if $\neg p \vee q$, p , then conclusion? **q**

[2] Boolean Algebra

다음은 입력이 x, y, z 이고 출력이 F 인 시스템에 관한 문제이다.

(a) minterm m_3, m_5, m_7 을 x, y, z 를 사용하여 나타내시오.

$m_3 = \bar{x}yz, m_5 = x\bar{y}z, m_7 = xyz$

(b) $F = m_3 + m_5 + m_7$ 일 때 truth table 을 구 하시오

x	y	z	F
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

(c) 위의 truth table 을 k-map 으로 변환 하시오.

	xy=00	xy=01	xy=11	xy=10
z=0	0	0	1	0
z=1	0	1	1	0

(d) k-map 을 사용하여 F 함수식을 간단히 하시오.

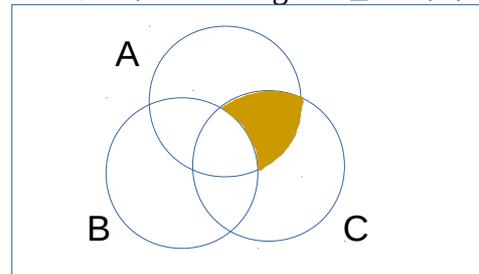
$F = xy + yz$

[3] Sets

(a) $A = \{a, b, c\}$ 의 멱집합 (power set)을 쓰시오.

$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

(b) $A \cap B^c \cap C$ 의 Venn Diagram 을 그리시오.



[4] Functions

다음 함수값을 쓰시오

- (a) floor(3.3) 3
- (b) floor(-3.3) -4
- (c) ceiling(3.0) 3
- (d) ceiling(-3.0) -3

정의구역과 공변역 모두 실수들의 집합 R 로 가정하고 참, 거짓을 판별하시오. 참, 거짓을 판별하시오.

- (e) floor(x)는 전사함수이다. No
- (f) ceiling(x)는 단사함수이다. Yes

[5] Matrix

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하시오. 34

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하시오. -96

(c) 다음 연립방정식을 Gauss-Jordan 소거법으로 해를 구할 때 처음 3 단계 과정을 쓰시오.

$$\begin{aligned} 2x+6y+z &= 7 \\ x+2y+z &= 7 \\ 5x+7y-4z &= 9 \end{aligned}$$

Step 1)

1	3	1/2	7/2
1	2	1	7
5	7	-4	9

Step 2)

1	3	1/2	7/2
0	-1	1/2	7/2
5	7	-4	9

Step 3)

1	3	1/2	7/2
0	-1	1/2	7/2
0	-8	-13/2	-17/2

[6] Relations

{1, 2, 3, 4} 에서 정의된 관계 R 은 다음과 같다 $R = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\}$

- (a) R 은 대칭적인가? Yes
- (b) R 은 반사적인가? No
- (c) R 은 추이적인가? No
- (d) R 은 반대칭적인가? No
- (e) R 의 reflexive closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$$\{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2), \text{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}\}$$

- (f) R 의 symmetric closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$$\{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\} \text{ already symmetric}$$

- (g) R 의 transitive closure 를 순서쌍을 사용하여 나타내시오.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2), \text{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}\}$$

[7] Algorithms

(a) $f(n) = n^3 + (10^3 n^{3/2})^3$ 을 Θ 식으로 나타내시오.

$$f(n) = \Theta(n^{\frac{9}{2}})$$

(b) $f(n) = \Theta(n^2)$ 이면 $f(n) = \Omega(\log n)$ 인가?

Yes

(c) 다음 알고리즘을 사용하여 {1, 8, 5, 2, 3, 7, 4, 6}을 정렬하려고 한다.

$i=2$ 에서 $i=8$ 단계의 중간 결과를 쓰시오.

$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
1	1	1	1	1	1	1
8	5	2	2	2	2	2
5	8	5	3	3	3	3
2	2	8	5	5	4	4
3	3	3	8	7	5	5
7	7	7	7	8	7	6
4	4	4	4	4	8	7
6	6	6	6	6	6	8

```

procedure insertsort (a(1), ..., a(n): real number with n >=2)
i := 2
while i <= n
  j := i
  while ((j >= 2) and (A(j-1) > A(j)))
    swap A(j) and A(j-1)
    j := j - 1
  end
  i := i + 1
end while
{a(1), ..., a(n) is in increasing order}

```