## Characteristics of Multiple Random Variables

Young W Lim

June 19, 2020

Young W Lim Characteristics of Multiple Random Variables

э

Copyright (c) 2018 Young W. Lim. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported" license.



< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Based on Probability, Random Variables and Random Signal Principles, P.Z. Peebles, Jr. and B. Shi



#### 1 Joint Guassian Random Variables

Young W Lim Characteristics of Multiple Random Variables

3 🕨 🖌 3

#### Bivariate Gaussian Density two random variables

#### Definition

The two random variables X and Y are said to be jointly Gaussian, if their joint density function is

3

Joint Guassian Random Variables

#### Bivariate Gaussian Density - Maximum value two random variables

$$f_{X,Y}(x,y) \leq f_{X,Y}(\overline{X},\overline{Y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

Young W Lim Characteristics of Multiple Random Variables

э

# Bivariate Gaussian Density - Uncorrelated two random variables

 $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(x)$  is sufficient to guarantee that X and Y are statistically independent. Any uncorrelated Guassian random variables are also statistically independent a coordinate rotation (linear transformation of X and Y) through the angle

$$\theta = \frac{1}{2} tan^{-1} \left[ \frac{2\rho \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \right]$$

is sufficient to convert correlated random variables X and Y having  $\sigma_X^2$  and  $\sigma_Y^2$ , respectively, correlation coefficient  $\rho$ , and the joint density of  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot exp[\cdots]$  into two statistically independent Gaussian random variables

Multi-variate Gaussian Density *N* random variables

*N* random variables  $X_1, X_2, ..., X_N$  are called jointly Gaussian if their joint density function can be written as

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\left| [C_X|^{-1} \right|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left\{ -\frac{[x-\overline{X}]^t [C_X][x-\overline{X}]}{2} \right\}$$

$$[x - \overline{X}] = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{X}_1 \\ x_2 - \overline{X}_2 \\ \\ x_N - \overline{X}_N \end{bmatrix}, \quad [C_X] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

**B N** 

#### Multi-variate Gaussian Density - notations *N* random variables

*N* random variables  $X_1, X_2, ..., X_N$  are called jointly Gaussian if their joint density function can be written as

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\left| [C_X|^{-1} \right|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left\{ -\frac{[x-\overline{X}]^t [C_X][x-\overline{X}]}{2} \right\}$$

where  $[\bullet]^t$  denotes a matrix transposition,  $[\bullet]^{-1}$  denotes a matrix inversion  $|\bullet|$  denotes a matrix determinant

#### Covariance Matrix *N* random variables

*N* random variables  $X_1, X_2, ..., X_N$  are called jointly Gaussian if their joint density function can be written as

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\left| [C_X|^{-1} \right|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} exp\left\{ -\frac{[x-\overline{X}]^t [C_X][x-\overline{X}]}{2} \right\}$$

where  $[C_x]$  is called the covariance matrix of N random variables

$$C_{ij} = E[(X_i - \overline{X}_i)(X_j - \overline{X}_j)] = \begin{cases} \sigma_{X_i}^2 & i = j \\ C_{X_i X_j} & i \neq j \end{cases}$$

Joint Guassian Random Variables

Covariance Matrix (N = 2)N random variables

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{|[C_X|^{-1}|^{1/2}}{(2\pi)^{2/2}} exp\left\{-\frac{[x-\overline{X}]^t[C_X][x-\overline{X}]}{2}\right\}$$
$$[C_X] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \rho \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \\ \rho \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}$$
$$[C_X]^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & -\rho/\sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \\ -\rho/\sigma_{X_1} \sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}$$
$$|[C_X]^{-1}| = 1/\sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2(1-\rho^2)$$

Young W Lim Characteristics of Multiple Random Variables

э

• • = • • = •

### Properties of Gaussian Random Variables *N* random variables

- completely defined thorugh only their first and second order mements their means, variances, and covariances
- if uncorrelated, then statistically independent
- a linear transformation of Gaussian random variables will produce Gaussian random variables
- any k-dimensional (k-variate) marginal density function obtained from the N-dimensional density function by integrating N - k random variables will be Gaussian
- $X_1, ..., X_k$  by integrating out  $X_{k+1}, ..., X_N$
- the covariance of  $X_1, ..., X_k$  is the  $k \times k$  submatrix of the  $N \times N$  covariance matrix of  $X_1, ..., X_N$

伺 ト イ ヨ ト イ ヨ ト

\*ロ \* \*日 \* \*日 \* \* \* \*

÷.

Young W Lim Characteristics of Multiple Random Variables

\*ロ \* \*日 \* \*日 \* \* \* \*

÷.